अध्याय 11

त्रिविमयि ज्यामिति

11.1 समग्र अवलोकन (Overview)

11.1.1 किसी रेखा की दिक्कोज्याएँ उन कोणों की कोज्याएँ (cosines) हैं जो वह रेखा निर्देशांक अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ बनाती है।

11.1.2 यदि l, m, n किसी रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं, तो $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ होता है।

11.1.3 दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्कोज्याएँ होती हैं:

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}, \text{ जहाँ}$$

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ है।}$$

11.1.4 किसी रेखा के दिक्-अनुपात वे संख्याएँ हैं जो उस रेखा की दिक्कोज्याओं के समानुपाती होती हैं।

11.1.5 यदि किसी रेखा की l, m, n दिक्कोज्याएँ हैं और a, b, c दिक्अनुपात हैं, तो

$$l = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \; m = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \; n = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

11.1.6 विषमतलीय रेखाएँ त्रिविमीय आकाश (space)में ऐसी रेखाएँ होती हैं जो न समांतर हैं और न ही प्रतिच्छेदी। ये भिन्न-भिन्न तलों में स्थित होती हैं।

11.1.7 दो विषमतलीय रेखाओं के बीच का कोण उन दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के बीच का कोण है, जो किसी बिंदु से (मूलबिंदु को प्राथमिकता देते हुए) इन विषमतलीय रेखाओं में से प्रत्येक के समांतर खींची जाती हैं।

11.1.8 यदि l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 दो रेखाओं की दिक्कोज्याएँ हैं तथा इन दोनों के बीच का न्यून कोण θ है, तो

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$

11.1.9 यदि a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 दो रेखाओं के दिक्-अनुपात हैं तथा इन दोनों के बीच का न्यून कोण θ है, तो

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right|$$

11.1.10 एक रेखा, जो स्थिति सदिश $\vec{a}$ वाले एक बिंदु से होकर जाती है और एक दिए हुए सदिश $\vec{b}$ के समांतर है, की सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ होती है।

11.1.11 एक बिंदु (x_1, y_1, z_1) से होकर जाने वाली तथा दिक्कोज्याएँ l, m, n (या दिक्-अनुपात a, b, c) वाली रेखा की समीकरण होती है:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \quad \text{या} \quad \left(\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}\right)$$

11.1.12 स्थिति सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ वाले दो बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा की सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ है।

11.1.13 दो बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) से होकर जाने वाली रेखा की कार्तीय समीकरण

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{होती है।}$$

11.1.14 यदि $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$ रेखाओं के बीच का न्यून कोण θ है, तो θ निम्नलिखित से प्राप्त किया जाता है:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2|}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|} \quad \text{या} \quad \theta = \cos^{-1}\frac{|\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2|}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}$$

11.1.15 यदि $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ और $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ दो रेखाओं की समीकरण हैं, तो इन रेखाओं के बीच का न्यून कोण θ निम्नलिखित से प्राप्त होता है:

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$

11.1.16 दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी उस रेखाखंड की लंबाई होती है जो इन दोनों रेखाओं पर लंब हो।

11.1.17 रेखाओं $\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r}=\vec{a}_2+\lambda\vec{b}_2$ के बीच की न्यूनतम दूरी निम्नलिखित होती है:

$$\left|\frac{(\vec{b}_1\times\vec{b}_2).(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|}\right|.$$

11.1.18 रेखा $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ और $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ के बीच की न्यूनतम दूरी है:

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}$$

11.1.19 समांतर $\vec{r}=\vec{a}_1+\mu\vec{b}$ और $\vec{r}=\vec{a}_2+\lambda\vec{b}$ रेखाओं के बीच की दूरी है:

$$\left|\frac{\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right|$$

11.1.20 एक समतल की सदिश समीकरण, जो मूलबिंदु से दूरी p पर है तथा उस समतल पर अभिलंब मात्रक सदिश में है, $\vec{r}.\hat{n}=p$ होती है।

11.1.21 उस समतल की समीकरण, $lx+my+nz=p$ होती है। जिसकी मूलबिंदु से दूरी p है और जिसकेअभिलंब की दिक्कोज्याएँ l, m, n हैं।

11.1.22 उस समतल की समीकरण, जो उस बिंदु से होकर जाती है जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है और जो सदिश $\vec{n}$ पर लंब है, $(\vec{r}-\vec{a}).\vec{n}=0$ या $\vec{r}.\vec{n}=d$ होती है, जहाँ $d=\vec{a}.\vec{n}$ है।

11.1.23 उस समतल की समीकरण, जो दिक्-अनुपातों a, b, c वाली एक रेखा पर लंब है और एक दिए हुए बिंदु (x_1, y_1, z_1) से होकर जाता है, $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ होती है।

11.1.24 तीन अंसरेखी बिंदुओं (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) और (x_3, y_3, z_3) से होकर जाने वाले समतल की समीकरण

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ होती है।}$$

11.1.25 स्थिति सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ वाले तीन असंरेखी बिंदुओं को अंतर्विष्ट करने वाले समतल की सदिश समीकरण $(\vec{r}-\vec{a}).\left[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})\right]=0$ होती है।

11.1.26 निर्देशांक अक्षों को $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ और $(0, 0, c)$ पर काटने वाले समतल की समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ होती है।

11.1.27 समतलों $\vec{r}.\vec{n}_1=d_1$ और $\vec{r}.\vec{n}_2=d_2$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले किसी समतल की सदिश समीकरण $(\vec{r}.\vec{n}_1-d_1)+\lambda(\vec{r}.\vec{n}_2-d_2)=0$ होती है, जहाँ λ कोई शून्येतर अचर है।

11.1.28 दिए हुए दो समतलों $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ और $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले समतल की कार्तीय समीकरण $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda\ (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ जहाँ λ कोई शून्येतर अचर है।

11.1.29 दो रेखाएँ $\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r}=\vec{a}_2+\lambda\vec{b}_2$ सह-तलीय होती है, यदि

$(\vec{a}_2-\vec{a}_1).(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)=0$ हो।

11.1.30 दो रेखाएँ $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ और $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ समतलीय होती हैं, यदि

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ हो।}$$

11.1.31 सदिश रूप में, यदि दो समतलों $\vec{r}.\vec{n}_1=d_1$ और $\vec{r}.\vec{n}_2=d_2$, के बीच का न्यून कोण θ हो, तो $\theta=\cos^{-1}\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}$ होता है।

11.1.32 रेखा $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ और समतल $\vec{r}\,.\,\vec{n} = d$ के बीच का न्यून कोण θ, $\sin\theta = \frac{|\vec{b}\,.\,\vec{n}|}{|\vec{b}|\,.\,|\vec{n}|}$ से प्राप्त होता है।

11.2 हल किये हुए उदाहरण

संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

उदाहरण 1 यदि किसी रेखा केदिक्-अनुपात 1, 1, 2 हैं, तो उसकी दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल दिक्कोज्याएँ निम्नलिखित से प्राप्त होती हैं।

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

यहाँ a, b, c क्रमशः 1, 1, 2, हैं।

अतः, $l = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}},\ m = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}},\ n = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}$

अर्थात्, $l = \frac{1}{\sqrt{6}},\ m = \frac{1}{\sqrt{6}},\ n = \frac{2}{\sqrt{6}}$, अर्थात् $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ दी हुई रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं।

उदाहरण 2 बिंदुओं P (2, 3, 5) और Q (–1, 2, 4) से होकर जाने वाली रेखा की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल बिंदु P (x_1, y_1, z_1) और Q (x_2, y_2, z_2) से होकर जाने वाली रेखा की दिक्कोज्याएँ

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ},\ \frac{y_2 - y_1}{PQ},\ \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$ होती हैं।

यहाँ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$= \sqrt{(-1-2)^2 + (2-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

अतः दिक्कोज्याएँ हैं।

$$\pm\left(\frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right) \text{ या } \pm\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

उदाहरण 3 यदि कोई रेखा x, y और z अक्षों की धनात्मक दिशाओं से क्रमशः 30°, 60° और 90° के कोण बनाती है, तो उसकी दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल उस रेखा की दिक्कोज्याएँ जो, अक्षों से α, β, γ कोण बनाती हैं, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ होती हैं।

अतः, उस रेखा की दिक्कोज्याएँ $\cos 30°, \cos 60°, \cos 90°$, अर्थात् $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ हैं।

उदाहरण 4 बिंदु Q (2, 2, 1) और R (5, 1, –2) को मिलाने वाली रेखा पर स्थित किसी बिंदु का x-निर्देशांक 4 है। इसका z-निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि बिंदु P रेखाखंड QR को $\lambda : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। तब, P के निर्देशांक हैं।

$$\left(\frac{5\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{-2\lambda+1}{\lambda+1}\right)$$

परंतु P का x– निर्देशांक 4 है। अतः, $\frac{5\lambda+2}{\lambda+1} = 4 \Rightarrow \lambda = 2$

इसलिए, P का z– निर्देशांक $= \frac{-2\lambda+1}{\lambda+1} = -1$

उदाहरण 5 उस बिंदु की समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) = 9$ से दूरी ज्ञात कीजिए जिसकी स्थिति सदिश $(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ है।

हल यहाँ $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{n} = \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ है तथा $d = 9$ है।

अतः, वाँछित दूरी $= \frac{\left|(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) - 9\right|}{\sqrt{1+4+16}}$

$$= \frac{|2-2-4-9|}{\sqrt{21}} = \frac{13}{\sqrt{21}}$$

उदाहरण 6 बिंदु (– 2, 4, – 5) की रेखा $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ दूरी ज्ञात कीजिए।

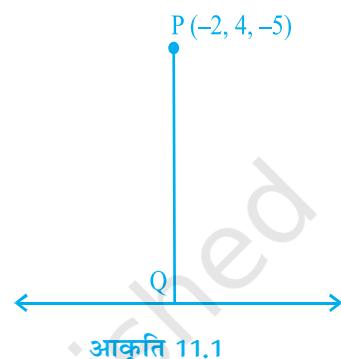
हल यहाँ P (–2, 4, – 5) दिया हुआ बिंदु है। रेखा पर कोई भी बिंदु Q (3λ –3, 5λ + 4, (6λ –8) है।
अतः, $\overrightarrow{PQ} = (3\lambda - 1)\,\hat{i} + 5\lambda\,\hat{j} + (6\lambda - 3)\,\hat{k}$.

आकृति 11.1

क्योंकि $\overrightarrow{PQ} \perp \left(3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}\right)$ है, इसलिए हमें प्राप्त होता है।

$$3\,(3\lambda - 1) + 5(5\lambda) + 6\,(6\lambda - 3) = 0$$

या $9\lambda + 25\lambda + 36\lambda = 21$, अर्थात् $\lambda = \frac{3}{10}$ है।

इस प्रकार, $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{10}\hat{i} + \frac{15}{10}\hat{j} - \frac{12}{10}\hat{k}$

अतः $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{10}\sqrt{1+225+144} = \sqrt{\frac{37}{10}}$

उदाहरण 7 उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ बिंदुओं (3, – 4, – 5) और (2, –3, 1) से होकर जाने वाली रेखा तीन बिंदुओं (2, 2, 1), (3, 0, 1) और (4, –1, 0) से होकर जाने वाले समतल को काटती है।

हल तीन बिंदुओं (2, 2, 1), (3, 0, 1) और (4, –1, 0) से होकर जाने वाले समतल की समीकरण है:

$$\left[(\vec{r} - (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})\right].\left[(\hat{i} - 2\hat{j}) \times (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})\right] = 0$$

अर्थात् $\vec{r}.(2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 7$ या $2x + y + z - 7 = 0$ ... (1)

बिंदुओं (3, – 4, – 5) और (2, – 3, 1) से होकर जाने वाली रेखा की समीकरण है:

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{6} \quad \text{... (2)}$$

रेखा (2) पर स्थित कोई भी बिंदु ($-\lambda + 3$, $\lambda - 4$, $6\lambda - 5$) है। यह बिंदु समतल (1) पर स्थित है। अतः, $2\,(-\lambda + 3) + (\lambda - 4) + (6\lambda - 5) - 7 = 0$, अर्थात् $\lambda = 2$ है।

अतः वाँछित बिंदु (1, – 2, 7) हैं।

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 8 रेखा $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})$ और समतल $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ के प्रतिच्छेद बिंदु से बिंदु (–1, –5, – 10) की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल दिया है: $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})$ और $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ इन दोनों समीकरणों को हल करने पर, $[(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})].(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ जिससे $\lambda=0$ प्राप्त होता है।

अत:, रेखा और समतल का प्रतिच्छेद बिंदु (2, – 1, 2) है। तथा अन्य गबिंदु (– 1, – 5, – 10) है। अत: इन बिंदुओं के बीच की दूरी $\sqrt{[2-(-1)]^2+[-1+5]^2+[2-(-10)]^2}$ अर्थात् 13 है।

उदाहरण 9 कोई समतल निर्देशांक अक्षों A, B, C पर इस प्रकार मिलता है कि बिंदु $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ ΔABC का केंद्रक है। दर्शाइए कि उस समतल की समीकरण $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=3$ है।

हल मान लीजिए कि समतल की समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ है।}$$

तब, A, B और C के निर्देशांक क्रमश: $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ और $(0, 0, c)$ है। त्रिभुज ΔABC का केंद्रक

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3} \quad \text{अर्थात्} \quad \frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3} \quad \text{है।}$$

परंतु ΔABC के केंद्रक के निर्देशांक (α, β, γ) हैं। (दिया है)

अत: $\quad \alpha=\frac{a}{3}, \beta=\frac{b}{3}$ और $\gamma=\frac{c}{3}$ है, अर्थात् $a=3\alpha$, $b=3\beta$ और $c=3\gamma$ है।

इस प्रकार, समतल की समीकरण

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=3 \text{ है।}$$

उदाहरण 10 उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक्कोज्याएँ $3l+m+5n=0$ और $6mn-2nl+5lm=0$ समीकरणों से प्राप्त होती हैं।

हल दोनों समीकरणों से m का विलोपन करने पर,

$\Rightarrow$ $2n^2 + 3\,ln + l^2 = 0$

$\Rightarrow$ $(n + l)\,(2n + l) = 0$

$\Rightarrow$ या तो $n = -\,l$ या $l = -\,2n$

अब, यदि $l = -\,n,$ तो $m = -\,2n$ है;

तथा यदि $l = -\,2n,$ तो $m = n$ है।

अतः दोनों रेखाओं के दिक्-अनुपात $-\,n, -2n, n$ और $-2n, n, n,$ के समानुपाती हैं, अर्थात्

$1, 2, -1$ और $-2, 1, 1.$

अत; इन रेखाओं के समांतर सदिशों की समीकरण क्रमशः हैं:

$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k},$

यदि इन रेखाओं के बीच का कोण θ है, तो

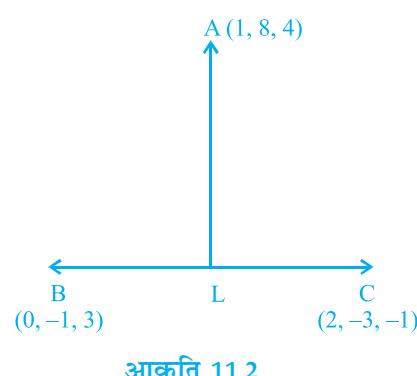
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$= \frac{(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})\cdot(-2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\,\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} = -\frac{1}{6}$$

अतः, $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{6}\right)$ है।

उदाहरण 11 बिंदु A (1, 8, 4) से बिंदुओं B (0, –1, 3) और C (2, –3, –1) को मिलाने वाली रेखा पर डाले गए लंब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.2

हल मान लीजिए कि L बिंदु A (1, 8, 4) से B और C बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा पर डाले गए लम्ब का पाद है, जैसा कि आकृति 11.2 में दर्शाया गया है। सूत्र $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$, का प्रयोग करने पर, रेखा BC की

समीकरण $\vec{r} = \left(-\hat{j}+3\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k}\right)$ है।

$$\Rightarrow \qquad x\hat{i}+y\hat{i}+z\hat{k} = 2\lambda\hat{i}-\left(2\lambda+1\right)\hat{j}+\left(3-4\lambda\right)\hat{k}$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$x = 2\lambda,\ y = -(2\lambda + 1),\ z = 3 - 4\lambda \qquad (1)$$

इस प्रकार, L के निर्देशांक $(2\lambda, -(2\lambda + 1), (3 - 4\lambda)$, हैं, जिससे रेखा AL के दिक्-अनुपात $(1 - 2\lambda), 8 + (2\lambda + 1), 4 - (3 - 4\lambda)$, हैं, अर्थात् $1 - 2\lambda, 2\lambda + 9, 1 + 4\lambda$ हैं।

क्योंकि AL, BC पर लंब है, इसलिए हमें प्राप्त होता है:

$$(1 - 2\lambda)(2 - 0) + (2\lambda + 9)(-3 + 1) + (4\lambda + 1)(-1 - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = \frac{-5}{6}$$

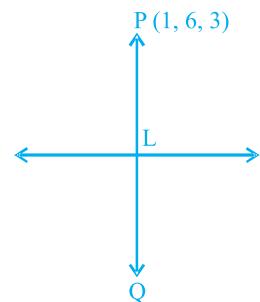
अभीष्ट बिंदु, समीकरण (1) में λ का मान प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है, जो $\left(\frac{-5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$ है।

उदाहरण 12 रेखा $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$ के सापेक्ष बिंदु P (1, 6, 3) का प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि P (1, 6, 3) दिया हुआ बिंदु है तथा मान लीजिए कि P से दी हुई रेखा पर डाले गए लंब का पाद L है। दी हुई रेखा पर स्थित व्यापक बिंदु के निर्देशांक $\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}=\lambda$

अर्थात् $x = \lambda$, $y = 2\lambda + 1$ और $z = 3\lambda + 2$ है। यदि L के निर्देशांक $(\lambda, 2\lambda + 1, 3\lambda + 2)$ हैं, तो PL के दिक्-अनुपात $\lambda - 1, 2\lambda - 5, 3\lambda - 1$ हैं। परंतु दी हुई रेखा के दिक्-अनुपात, जो PL पर लंब है, 1, 2, 3 है। अत:, $(\lambda - 1)\,1 + (2\lambda - 5)\,2 + (3\lambda - 1)\,3 = 0$ जिससे $\lambda = 1$ प्राप्त होता है। अत: L के निर्देशांक (1, 3, 5) हैं। मान लीजिए कि दी हुई रेखा में P (1, 6, 3) का प्रतिबिंब Q (x_1, y_1, z_1) है। तब L रेखाखंड PQ का मध्य बिंदु है।

आकृति 11.3

अत:, $\frac{x_1+1}{2}=1,\ \frac{y_1+6}{2}=3$ तथा $\frac{z_1+3}{2}=5$

$\Rightarrow \qquad x_1 = 1,\ y_1 = 0,\ z_1 = 7$

अतः, दी हुई रेखा में (1, 6, 3) का प्रतिबिंब (1, 0, 7) है।

उदाहरण 13 समतल $\hat{r} \cdot \left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+3=0$ में उस बिंदु का प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए जिसका स्थिति सदिश $\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ है।

हल मान लीजिए कि दिया हुआ बिंदु P $\left(\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)$ है तथा समतल $\hat{r} \cdot \left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$ में Q बिंदु P का प्रतिबिंब है, जैसा कि आकृति 11.4. में दर्शाया गया है।

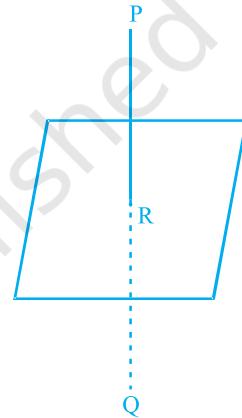
तब, PQ इस समतल का अभिलंब होगा। क्योंकि PQ, P से होकर जाती है तथा समतल पर लंब है, इसलिए PQ की समीकरण निम्नलिखित होगी–

$$\vec{r}=\left(\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$$

क्योंकि बिंदु Q रेखा PQ पर स्थित है, इसलिए Q के स्थिति सदिश को निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

$$\left(\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right),$$

अर्थात् $\qquad (1+2\lambda)\hat{i}+(3-\lambda)\hat{j}+(4+\lambda)\hat{k}$

P
R
Q

आकृति 11.4

क्योंकि R रेखाखंड PQ का मध्य-बिंदु है, इसलिए R का स्थिति सदिश है:

$$\frac{\left[(1+2\lambda)\hat{i}+(3-\lambda)\hat{j}+(4+\lambda)\hat{k}\right]+\left[\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right]}{2}$$

अर्थात् $\qquad (\lambda+1)\hat{i}+\left(3-\dfrac{\lambda}{2}\right)\hat{j}+\left(4+\dfrac{\lambda}{2}\right)\hat{k}$

पुनः, क्योंकि R समतल $\vec{r} \cdot \left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+3=0$ पर स्थित है, इसलिए

$$\left\{(\lambda+1)\hat{i}+\left(3-\frac{\lambda}{2}\right)\hat{j}+\left(4+\frac{\lambda}{2}\right)\hat{k}\right\}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})+3=0$$

$\Rightarrow \qquad \lambda = -2$

अत:, Q का स्थिति सदिश $\left(\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)-2\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$ अर्थात् $-3\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}$ है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 14 से 19 तक प्रत्येक में, दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए:

उदाहरण 14 बिंदु (2, 5, 7) से $x-$ अक्ष पर डाले गए लंबपाद के निर्देशांक हैं।

(A) (2, 0, 0) (B) (0, 5, 0) (C) (0, 0, 7) (D) (0, 5, 7)

हल (A) सही उत्तर है।

उदाहरण 15 बिंदु (3, 2, –1) और (6, 2, –2) को मिलाने वाले रेखांखड पर स्थित कोई बिंदु P है। यदि P का x-निर्देशांक 5 है, तो उसका y निर्देशांक है

(A) 2 (B) 1 (C) –1 (D) –2

हल (A) सही उत्तर है। मान लीजिए कि P रेखाखंड को $\lambda : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। तब, P के x निर्देशांक को $x=\frac{6\lambda+3}{\lambda+1}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जिससे $\frac{6\lambda+3}{\lambda+1}=5$ प्राप्त होता है। इस कारण $\lambda=2$ है। इस प्रकार, P का y निर्देशांक $\frac{2\lambda+2}{\lambda+1}=2$ है।

उदाहरण 16 यदि एक रेखा x, y, z अक्षों की धनात्मक दिशाओं से क्रमश: α, β, γ कोण बनाती है तो इस रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं:

(A) $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ (B) $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

(C) $\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma$ (D) $\cos^2\alpha, \cos^2\beta, \cos^2\gamma$

हल (B) सही उत्तर है।

उदाहरण 17 x-अक्ष से बिंदु P (a, b, c) की दूरी है

(A) $\sqrt{a^2+c^2}$ (B) $\sqrt{a^2+b^2}$ (C) $\sqrt{b^2+c^2}$ (D) b^2+c^2

हल (C) सही उत्तर है। बिंदु P (a, b, c) की बिंदु Q $(a, 0, 0)$ से $\sqrt{b^2+c^2}$ है।

उदाहरण 18 आकाश (स्पेस) में x-अक्ष की समीकरण हैं

(A) $x=0, y=0$ (B) $x=0, z=0$ (C) $x=0$ (D) $y=0, z=0$

हल (D) सही उत्तर है। x–अक्ष पर y निर्देशांक और z निर्देशांक शून्य होते हैं।

उदाहरण 19 कोई रेखा निर्देशांक अक्षों से बराबर कोण बनाती है। इस रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं

(A) $\pm(1, 1, 1)$ (B) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (C) $\pm\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (D) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

हल (B) सही उत्तर है। मान लीजिए कि रेखा प्रत्येक अक्ष से α कोण बनाती है। तब इसकी दिक्कोज्याएँ

$\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha$ होंगी। क्योंकि $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ है, इसलिए $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ होगा।

उदाहरण 20 से 22 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए–

उदाहरण 20 यदि एक रेखा x, y और z अक्षों से क्रमशः $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{4}$ कोण बनाती हैं, तो इसकी दिक्कोज्याएँ ________ होंगी।

हल दिक्कोज्याएँ $\cos\frac{\pi}{2}, \cos\frac{3\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}$ अर्थात् $\pm\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ हैं।

उदाहरण 21 यदि कोई रेखा निर्देशांक अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ कोण α, β, γ बनाती है, तो $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ का मान ________ है।

हल
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = (1 - \cos^2\alpha) + (1 - \cos^2\beta) + (1 - \cos^2\gamma)$$
$$= 3 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 2$$

उदाहरण 22 यदि एक रेखा y और z अक्षों में से प्रत्येक से $\frac{\pi}{4}$ कोण बनाती है, तो रेखा द्वारा x–अक्ष के साथ बनाया गया कोण __________ है।

हल मान लीजिए यह x–अक्ष से कोण α बनाती है। तब, $\cos^2\alpha + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = 1$ जिसे सरल करने पर $\alpha = \frac{\pi}{2}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 23 और 24 में बताइए कि कथन सत्य हैं या असत्य-

उदाहरण 23 बिंदु (1, 2, 3), (–2, 3, 4) और (7, 0, 1) संरेखी है।

हल मान लीजिए कि A, B, C क्रमशः बिंदु (1, 2, 3), (–2, 3, 4) और (7, 0, 1) हैं। तब, AB और BC रेखाओं में से प्रत्येक के दिक्अनुपात – 3, 1, 1 के समानुपाती हैं। अतः कथन सत्य है।

उदाहरण 24 बिंदु (3,5,4) और (5,8,11) से होकर जाने वाली रेखा की सदिश समीकरण

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k})$$ है।

हल बिंदुओं (3,5,4) और (5,8,11) के स्थिति सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}, \vec{b} = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 11\hat{k}$ हैं।

अतः रेखा की वाँछित समीकरण है: $\vec{r} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k})$

अतः, कथन सत्य है।

11.3 प्रश्नावली

लघुउत्तरीय (S.A.)

1. आकाश (स्पेस) में ऐसे बिंदु A के स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए कि $\overrightarrow{OA}$, OX से 60° झुका हुआ हो और OY से 45° पर झुका हुआ हो तथा $|\overrightarrow{OA}| = 10$ इकाई है।

2. उस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ के समांतर है तथा बिंदु (1,–2,3) से होकर जाती है।

3. दर्शाइए कि रेखाएँ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ और $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = z$ प्रतिच्छेद करती हैं। साथ ही, इनका प्रतिच्छेद बिंदु भी ज्ञात कीजिए।

4. रेखा $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = (2\hat{j} - 5\hat{k}) + \mu(6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

5. सिद्ध कीजिए कि A (0, –1, –1) और B (4, 5, 1) बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा C (3, 9, 4) और D (– 4, 4, 4) बिंदुओ से होकर जाने वाली रेखा को प्रतिच्छेद करती है।

6. सिद्ध कीजिए कि $x = py + q, z = ry + s$ तथा $x = p'y + q', z = r'y + s'$ रेखाएँ परस्पर लंब हैं, यदि $pp' + rr' + 1 = 0$.

7. उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए, जो A (2, 3, 4) और B (4, 5, 8) बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को समकोण पर समद्विभाजित करता है।

8. उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूलबिंदु से $3\sqrt{3}$ इकाई की दूरी पर है तथा जिसका अभिलंब निर्देशांक अक्षों से समान झुकाव पर है।

9. यदि किसी बिंदु (–2, – 1, – 3) से होकर खींची गई रेखा किसी समतल को समकोण पर बिंदु (1, – 3, 3) पर मिलती है, तो उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए।

10. बिंदुओं (2, 1, 0), (3, –2, –2) और (3, 1, 7) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

11. मूलबिंदु से होकर जाने वाली उन दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनमें से प्रत्येक रेखा $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$ को $\frac{\pi}{3}$ के कोण पर प्रतिच्छेद करती है।

12. उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक्कोज्याएँ $l+m+n=0$ तथा $l^2+m^2-n^2=0$ समीकरणों से प्राप्त होती हैं।

13. यदि किसी चर रेखा की दो आसन्न स्थितियों में दिक्कोज्याएँ l, m, n और $l+\delta l, m+\delta m, n+\delta n$ हैं तो दर्शाइए कि इन दो स्थितियों के बीच में छोटा कोण $\delta\theta$ निम्नलिखित से प्राप्त होगा।

$$\delta\theta^2 = \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2$$

14. O मूल बिंदु है तथा (a, b, c) बिंदु A को प्रदर्शित करते हैं। रेखा OA की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए तथा A से होकर जाने वाले और OA से समकोण पर रहने वाले समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए।

15. समकोणिक अक्षों की दो पद्धतियों का एक ही मूल बिंदु है। यदि कोई तल इनको मूल बिंदु से क्रमशः a, b, c और a', b', c' पर काटता है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}$$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

16. बिंदु (2,3,–8) से रेखा $\frac{4-x}{2}=\frac{y}{6}=\frac{1-z}{3}$ पर डाले गए लंब का पाद ज्ञात कीजिए। साथ ही, इस बिंदु से रेखा की लांबिक दूरी भी ज्ञात कीजिए।

17. बिंदु (2,4,–1) की रेखा $\frac{x+5}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-6}{-9}$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

18. बिंदु $\left(1,\frac{3}{2},2\right)$ से समतल $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ पर डाले गए लंब की लंबाई और उसका लंब पाद ज्ञात कीजिए।

19. बिंदु (3,0,1) से होकर जाने वाली उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो $x + 2y = 0$ और $3y - z = 0$ समतलों के समांतर हैं।

20. उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए, जो (2,1,–1) और (–1,3,4) बिंदुओं से होकर जाता है तथा समतल $x - 2y + 4z = 10$ पर लंब है।

21. रेखाओं $\vec{r} = (8+3\lambda\hat{i} - (9+16\lambda)\,\hat{j} + (10+7\lambda)\hat{k}$ और $\vec{r} = 15\hat{i} + 29\,\hat{j} + 5\,\hat{k} + \mu(3\hat{i} + 8\,\hat{j} - 5\hat{k})$ बीच की लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

22. उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $5x + 3y + 6z + 8 = 0$ पर लंब है तथा जिसमें $x + 2y + 3z - 4 = 0$ और $2x + y - z + 5 = 0$ समतलों की प्रतिच्छेदन रेखा अंतर्विष्ट है।

23. समतल $ax + by = 0$ को इसकी समतल $z = 0$ के साथ प्रतिच्छेदन रेखा के परित: कोण α पर घुमाया जाता हैं। सिद्ध कीजिए कि उस समतल का अपनी नई स्थिति में समीकरण

$ax + by \pm(\sqrt{a^2 + b^2}\tan\alpha)\,z = 0$ है।

24. समतल $\vec{r}\cdot(\hat{i} + 3\,\hat{j}) - 6 = 0$ और $\vec{r}\cdot(3\,\hat{i} - \hat{j} - 4\,\hat{k}) = 0$ केप्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले उस समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी मूल बिंदु से लांबिक दूरी इकाई है।

25. दर्शाइए कि बिंदु $(\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$ और $3(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ समतल $\vec{r}\cdot(5\hat{i} + 2\,\hat{j} - 7\hat{k}) + 9 = 0$ से समदूरस्थ है तथा इसके विपरीत ओर स्थित हैं।

26. $\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\overrightarrow{CD} = -3\hat{i} + 2\,\hat{j} + 4\hat{k}$ दो सदिश हैं। बिंदु A और C के स्थिति सदिश क्रमशः $6\hat{i} + 7\,\hat{j} + 4\hat{k}$ और $-9\,\hat{j} + 2\hat{k}$ हैं, रेखा AB पर स्थित बिंदु P और रेखा CD पर स्थित बिंदु Q के स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए ताकि $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$ दोनों पर लंब हो।

27. दर्शाइए कि वे सरल रेखाएँ जिनकी दिक्कोज्याएँ समीकरणों $2l + 2m - n = 0$ और $mn + nl + lm = 0$ से प्राप्त होती है परस्पर समकोण हैं।

28. यदि $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$ तीन परस्पर लंब रेखाओं की दिक्कोज्याएँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि वह रेखा, जिसकी दिक्कोज्याएँ $l_1 + l_2 + l_3, m_1 + m_2 + m_3, n_1 + n_2 + n_3$ के समानुपाती हैं, उपरोक्त रेखाओं से बराबर कोण बनाती हैं।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 29 से 36 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

29. बिंदु (α,β,γ) की y-अक्ष से दूरी है

(A) β (B) $|\beta|$ (C) $|\beta|+|\gamma|$ (D) $\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}$

30. यदि एक रेखा की दिक्कोज्याएँ k, k, k हैं, तो

(A) $k>0$ (B) $0<k<1$ (C) $k=1$ (D) $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$ या $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

31. मूल बिंदु से समतल $\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}-\frac{6}{7}\hat{k}\right)=1$ की दूरी है

(A) 1 (B) 7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) इनमें से कोई नहीं

32. सरल रेखा $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$ और समतल $2x - 2y + z = 5$ के बीच के कोण की sine है

(A) $\frac{10}{6\sqrt{5}}$ (B) $\frac{4}{5\sqrt{2}}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

33. xy–समतल में बिदु (α,β,γ) का परावर्तन है

(A) $(\alpha,\beta,0)$ (B) $(0,0,\gamma)$ (C) $(-\alpha,-\beta,\gamma)$ (D) $(\alpha,\beta,-\gamma)$

34. चतुर्भुज ABCD, जहाँ A(0,4,1), B (2, 3, –1), C(4, 5, 0) और D (2, 6, 2) है, का क्षेत्रफल बराबर है।

(A) 9 वर्ग इकाई (B) 18 वर्ग इकाई (C) 27 वर्ग इकाई (D) 81 वर्ग इकाई

35. $xy + yz = 0$ द्वारा निरूपित बिंदुपथ है

(A) लंब रेखाओं का एक युग्म (B) समांतर रेखाओं का एक युग्म
(C) समांतर समतलों का एक युग्म (D) लंब समतलों का एक युग्म

36. समतल $2x - 3y + 6z - 11 = 0$, x– अक्ष के साथ $\sin^{-1}(\alpha)$ का कोण बनाता है। α का मान है।

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$

प्रश्न 37 से 41 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए–

37. एक समतल (2,0,0) (0,3,0) और (0,0,4) बिंदुओं से होकर जाता है। इस समतल की समीकरण__________है।

38. सदिश $(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ की दिक्कोज्याएँ__________हैं।

39. रेखा $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ की सदिश समीकरण __________है।

40. बिंदु (3,4,–7) और (1,–1,6) से होकर जाने वाली रेखा की सदिश समीकरण__________है।

41. समतल $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=2$ का कार्तीय समीकरण __________है।

प्रश्न 42 से 49 तक प्रत्येक में सत्य या असत्य कथन बताइए–

42. समतल $x+2y+3z-6=0$ पर अभिलंब एकक (या मात्रक) सदिश $\frac{1}{\sqrt{14}}\hat{i}+\frac{2}{\sqrt{14}}\hat{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\hat{k}$ है।

43. समतल $2x-3y+5z+4=0$ द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गए अंत:खंड $-2, \frac{4}{3}, -\frac{4}{5}$ है।

44. रेखा $\vec{r}=(5\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k})+\lambda(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ और समतल $\vec{r}.(3\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k})+5=0$ के बीच का कोण $\sin^{-1}\frac{5}{2\sqrt{91}}$ है।

45. समतल $\vec{r}.(2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})=1$ और $\bar{r}.(\hat{i}-\hat{j})=4$ के बीच का कोण $\cos^{-1}\frac{-5}{\sqrt{58}}$ है।

46. रेखा $\vec{r}=2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})$ समतल $\vec{r}.(3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+2=0$ में स्थित है।

47. रेखा $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ सदिश समीकरण $\vec{r}=5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k})$ है।

48. बिंदु (5,–2,4), से होकर जाने वाली और $2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ के समांतर रेखा की समीकरण $\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ है।

49. यदि मूल बिंदु से किसी समतल पर खींचे गए लंब का पाद $(5,-3,-2)$, है, तो उस समतल की समीकरण $\vec{r}.(5\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})=38$ है।